

REFLEXIONA Y RESUELVE

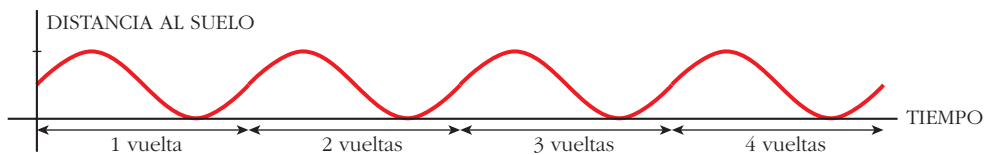
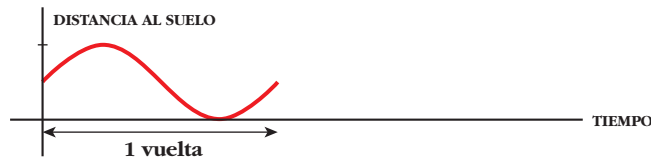
A vueltas con la noria

■ Modificando la escala, representa la función:

x : tiempo transcurrido

y : distancia al suelo

correspondiente a cuatro vueltas de la noria.

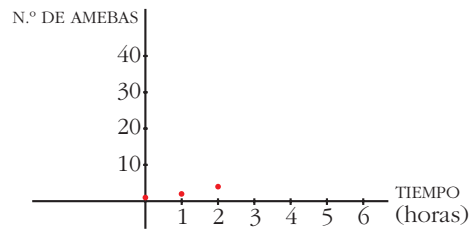


Muchas, muchas amebas

a) Calcula el número aproximado de amebas que habrá según pasan las horas y completa esta tabla en tu cuaderno:

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE AMEBAS	1	2	4				

b) Representa gráficamente estos datos en una hoja de papel cuadrulado.



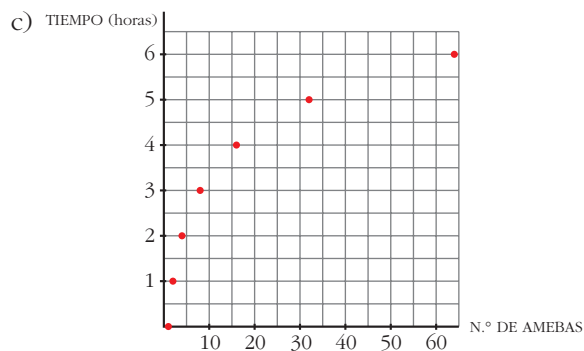
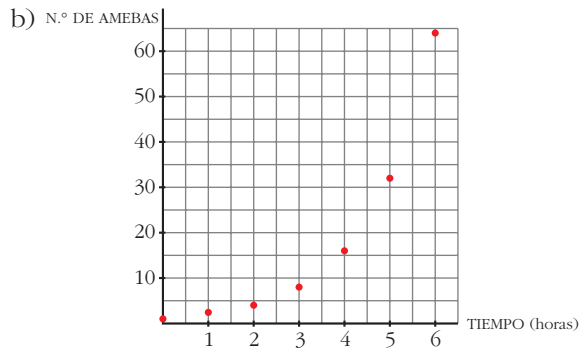
c) Cambia los ejes y representa la función cuyas variables sean, ahora:

x : número de amebas

y : tiempo (en horas)

a)

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE AMEBAS	1	2	4	8	16	32	64

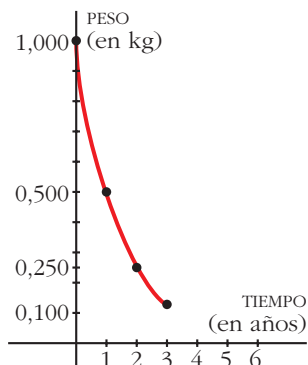


Desintegración radiactiva

a) Completa la tabla siguiente (utiliza la calculadora para obtener los valores con tres cifras decimales):

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUSTANCIA (kg)	1	0,5	0,250	0,125			

b) Representa gráficamente los datos en papel cuadrulado.



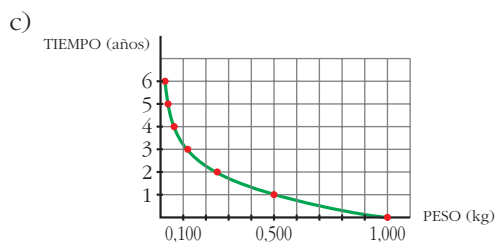
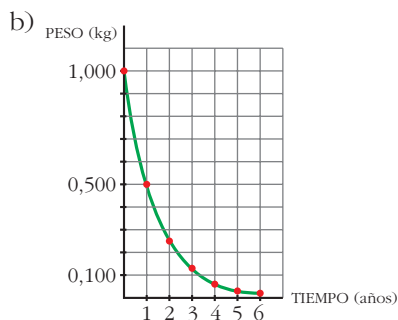
c) Cambia los ejes y representa la función cuyas variables son, ahora:

x : peso de la sustancia radiactiva (en kg)

y : tiempo transcurrido (en años)

a)

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUSTANCIA (kg)	1	0,5	0,250	0,125	0,063	0,031	0,016



Página 130

1. Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

$$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$$

$$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$$

$$f[g(4)] = 179; \quad g[f(4)] = 1$$

2. Si $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.

$$f \circ g(x) = \text{sen}(x^2 + 5); \quad f \circ g(0) = -0,96; \quad f \circ g(2) = 0,41$$

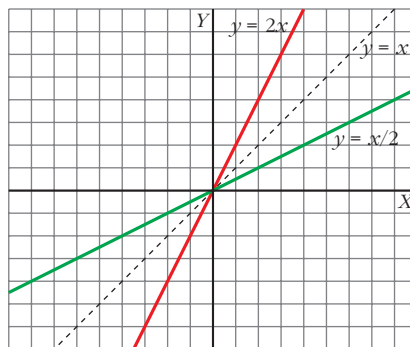
$$g \circ f(x) = \text{sen}^2 x + 5; \quad g \circ f(0) = 5; \quad g \circ f(2) = 5,83$$

$$f \circ f(x) = \text{sen}(\text{sen } x); \quad f \circ f(0) = 0; \quad f \circ f(2) = 0,79$$

$$g \circ g(x) = (x^2 + 5)^2 + 5; \quad g \circ g(0) = 30; \quad g \circ g(2) = 86$$

Página 131

1. Representa $y = 2x$, $y = x/2$ y comprueba que son inversas.



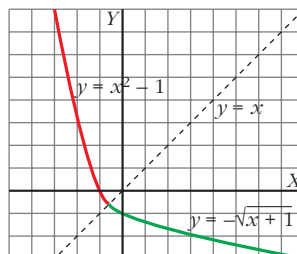
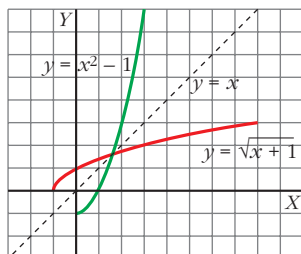
2. Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas respecto de la recta $y = x$. Averigua cuáles son.

a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$$y^{-1} = \sqrt{x+1}$$

b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

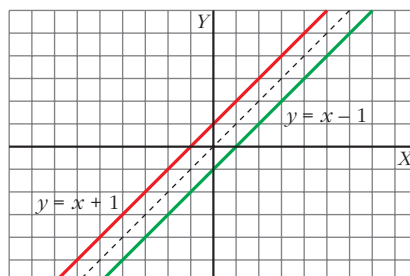
$$y^{-1} = -\sqrt{x+1}$$



3. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, comprueba que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones inversas? Comprueba que el punto $(a, a + 1)$ está en la gráfica de f y que el punto $(a + 1, a)$ está en la gráfica de g . Representa las dos funciones y observa su simetría respecto de la recta $y = x$.

$$f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$$

Son funciones inversas.



Página 133

1. La masa de madera de un bosque aumenta en un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (*biomasa*) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo 100 años, la función $M = 1,4^t$ nos da la cantidad de masa vegetal, M , en un instante cualquiera, t expresado en siglos a partir de 1800 (razona por qué).

a) Averigua cuándo habrá una masa de madera triple que en 1800 ($1,4^t = 3$) y cuándo había la tercera parte. Observa que los dos periodos de tiempo son iguales.

b) Calcula la cantidad de madera que habrá, o había, en 1900, 1990, 2000, 1600 y 1550.

$$M = 1,4^t$$

a) • Buscamos el valor de t para el cual $1,4^t = 3$:

$$1,4^t = 3 \rightarrow \ln(1,4^t) = \ln(3) \rightarrow t \ln(1,4) = \ln(3) \rightarrow t = \frac{\ln 3}{\ln 1,4} \approx 3,27$$

Cuando pasen $3,27 \cdot 100 = 327$ años, se habrá triplicado la masa de madera. Esto es, en el año $1800 + 327 = 2127$.

• Buscamos el valor de t para el cual $1,4^t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$:

$$1,4^t = 3^{-1} \rightarrow \ln(1,4^t) = \ln(3)^{-1} \rightarrow t \ln(1,4) = -\ln(3) \rightarrow t = -\frac{\ln 3}{\ln 1,4} \approx -3,27$$

Hace $3,27 \cdot 100 = 327$ años, había la tercera parte de masa de madera. Esto es, en el año $1800 - 327 = 1473$.

$$\text{b) } 1900 \rightarrow t = 1 \rightarrow M = 1,4^1 = 1,4$$

$$1990 \rightarrow t = \frac{1990 - 1800}{100} = 1,9 \rightarrow M = 1,4^{1,9} \approx 1,90$$

$$2000 \rightarrow t = \frac{2000 - 1800}{100} = 2 \rightarrow M = 1,4^2 = 1,96$$

$$1600 \rightarrow t = \frac{1600 - 1800}{100} = -2 \rightarrow M = 1,4^{-2} \approx 0,51$$

$$1550 \rightarrow t = \frac{1550 - 1800}{100} = -2,5 \rightarrow M = 1,4^{-2,5} \approx 0,43$$

- 2.** Comprueba que, en el ejemplo anterior referente a la desintegración de una cierta sustancia radiactiva, $M = m \cdot 0,76^t$ (t expresado en miles de años), el *periodo de semidesintegración* (tiempo que tarda en reducirse a la mitad la sustancia radiactiva) es de, aproximadamente, 2 500 años.

Para ello, comprueba que una cantidad inicial cualquiera se reduce a la mitad (aproximadamente) al cabo de 2 500 años ($t = 2,5$).

$$M = m \cdot 0,76^t$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } t = 0 \rightarrow M = m \cdot 0,76^0 = m \\ \text{Si } t = 0,25 \rightarrow M = m \cdot 0,76^{2,5} \approx m \cdot 0,5 = \frac{m}{2} \end{array} \right\}$$

La cantidad inicial se ha reducido (aproximadamente) a la mitad en 2 500 años.

Página 143

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Composición y función inversa

- 1 Dadas las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = \frac{5x}{2}$, halla:

a) $f[g(2)]$ b) $g[f(-1)]$ c) $f[g(x)]$ d) $g[f(x)]$

a) $f[g(2)] = f\left[\frac{5 \cdot 2}{2}\right] = f(5) = 5 + 3 = 8$

b) $g[f(-1)] = g(-1 + 3) = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

c) $f[g(x)] = f\left(\frac{5x}{2}\right) = \frac{5x}{2} + 3$

d) $g[f(x)] = g(x + 3) = \frac{5(x + 3)}{2}$

- 2 Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$ obtén la expresión de las siguientes funciones:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2x^2 - 4x + 3$

b) $g \circ f(x) = g[2x + 3] = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

c) $f \circ f(x) = f(2x + 3) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

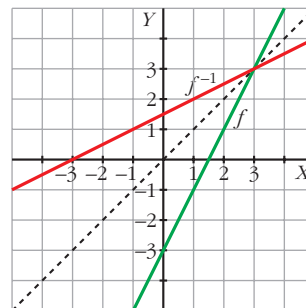
d) $g \circ g(x) = g(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$

- 3 ¿Cuál es la función inversa de $f(x) = 2x - 3$?

Representa $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes coordenados y comprueba su simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

$$y = 2x - 3 \rightarrow x = 2y - 3 \rightarrow \frac{x + 3}{2} = y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$$



- 4** Considera las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$ c) $(g \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$

$$a) (f \circ g)(2) = f[g(2)] = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$

$$b) (g \circ f)(-3) = g[f(-3)] = g(10) = \frac{1}{10}$$

$$c) (g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$$

$$d) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$$

- 5** Dadas las funciones $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$

$$a) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 2$$

$$b) (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x + 2) = \sqrt{3x + 2}$$

$$c) (g \circ g)(x) = g[g(x)] = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

- 6** Con las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = x - 2$, hemos obtenido por composición las funciones $p(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ y $q(x) = \frac{1}{x^2} - 2$. Indica cuál de estas expresiones corresponde a $f \circ g$ y cuál a $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{(x-2)^2} \rightarrow (f \circ g)(x) = p(x)$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{x^2} - 2 \rightarrow (g \circ f)(x) = q(x)$$

- 7** Halla la función inversa de estas funciones:

a) $y = 3x$

b) $y = x + 7$

c) $y = 3x - 2$

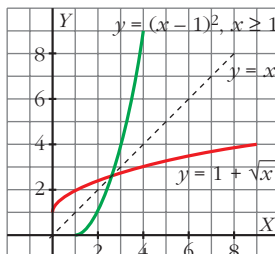
$$a) y = 3x \rightarrow x = 3y \rightarrow y = \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$$

$$b) y = x + 7 \rightarrow x = y + 7 \rightarrow y = x - 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$$

$$c) y = 3x - 2 \rightarrow x = 3y - 2 \rightarrow y = \frac{x+2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

- 8 Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

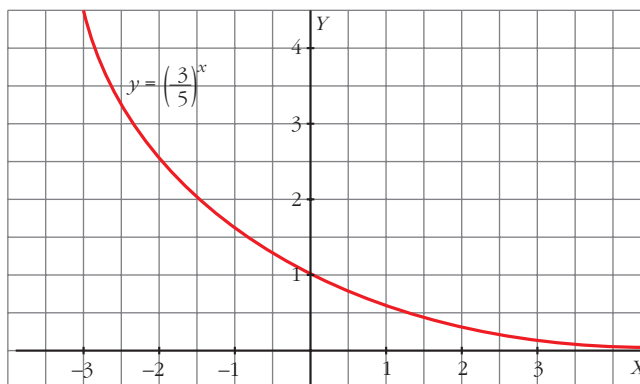
$$y = 1 + \sqrt{x} \rightarrow x = 1 + \sqrt{y} \rightarrow (x - 1)^2 = y \rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2$$



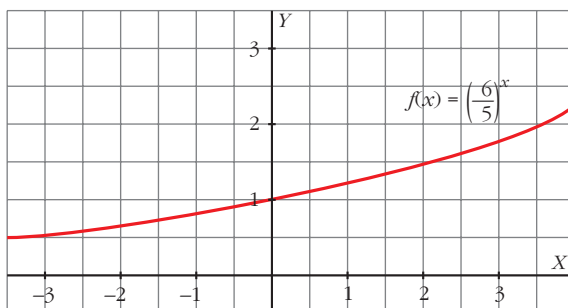
Funciones exponenciales y logarítmicas

- 9 Con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores de la función $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ y represéntala gráficamente.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22



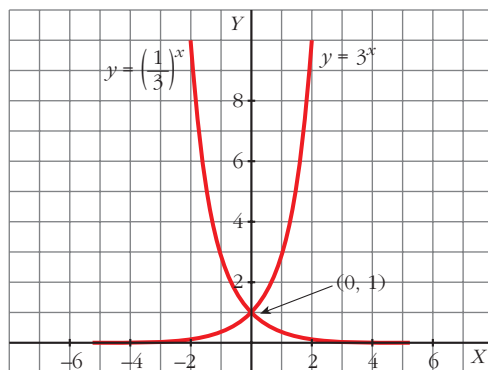
- 10 Representa la función $y = \left(\frac{6}{5}\right)^x$. ¿Es creciente o decreciente?



Es creciente.

- 11** Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY.

• Representálas en los mismos ejes.

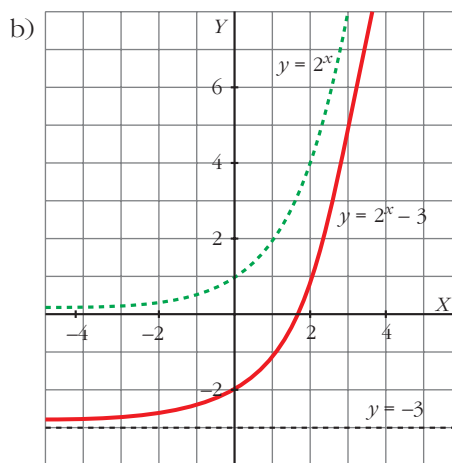
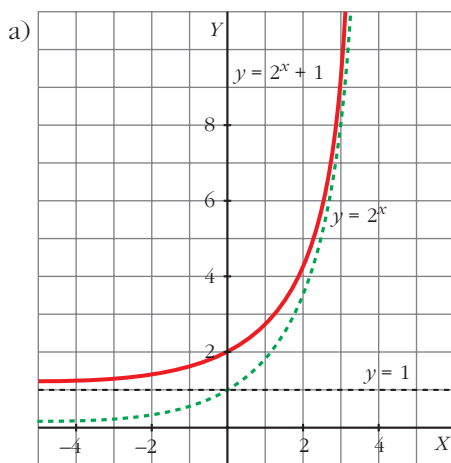


- 12** Representa las funciones:

a) $y = 2^x + 1$

b) $y = 2^x - 3$

• Utiliza la gráfica de $y = 2^x$.



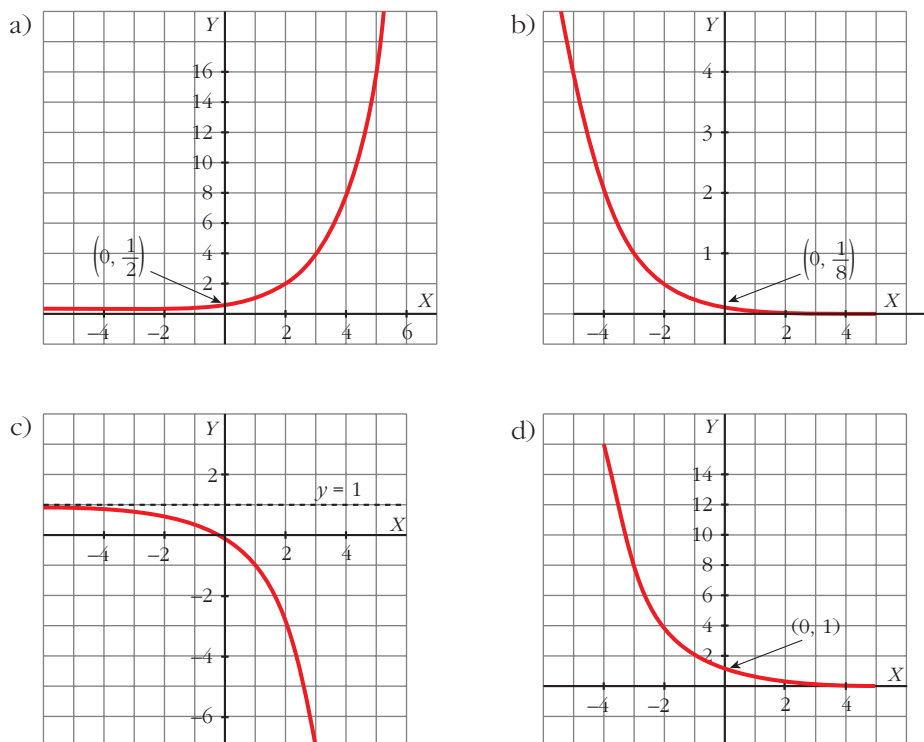
- 13** Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2^{x-1}$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

c) $y = 1 - 2^x$

d) $y = 2^{-x}$

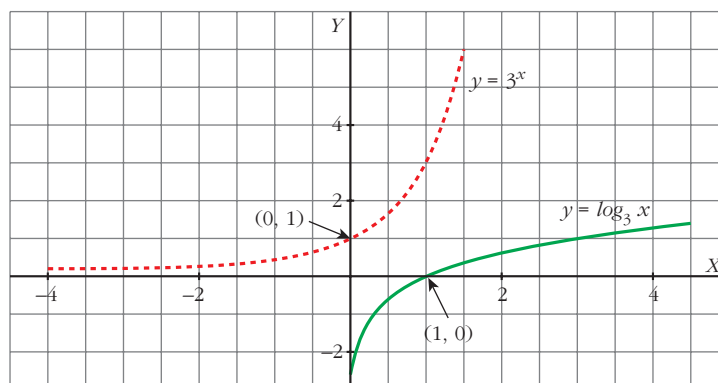


14 Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa la función $y = \log_3 x$.

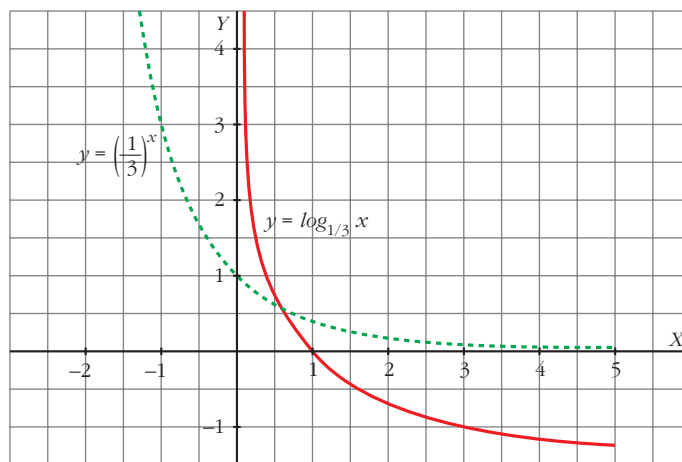
• Si el punto $(2, 9)$ pertenece a $y = 3^x$, el punto $(9, 2)$ pertenecerá a $y = \log_3 x$.

x	-2	-1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2

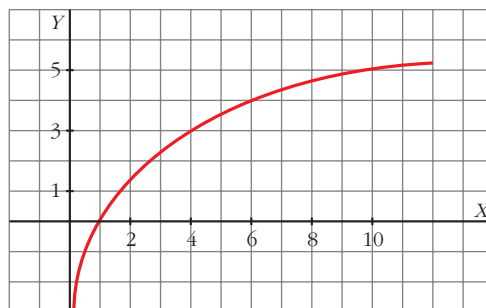


- 15** Representa la gráfica de $y = \log_{1/3} x$ a partir de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



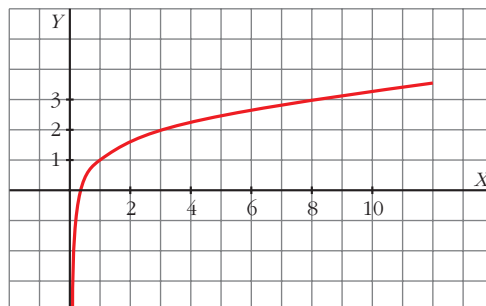
- 16** Haz, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = 5 \log x$ y represéntala gráficamente.

x	0,5	1	1,5	2	3	6	10
y	-1,5	0	0,88	1,5	2,38	3,89	5



- 17** Representa la función $y = 1 + \ln x$.

🔵 Mira el ejercicio resuelto 2.



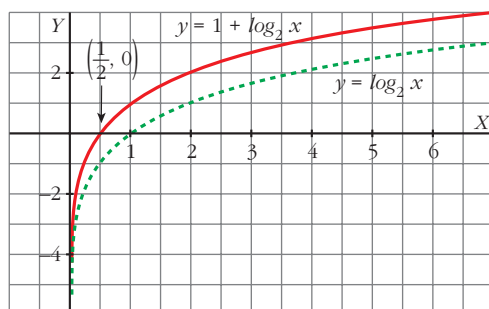
18 Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = \log_2 x$:

a) $y = 1 + \log_2 x$

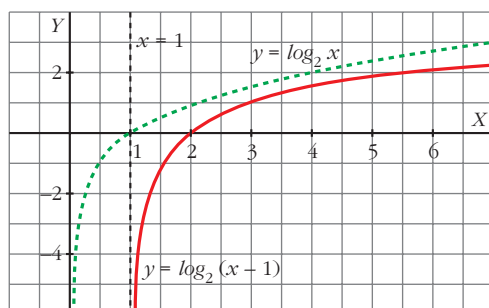
b) $y = \log_2 (x - 1)$

En b), el dominio es $(1, +\infty)$.

a) $y = 1 + \log_2 x$



b) $y = \log_2 (x - 1)$

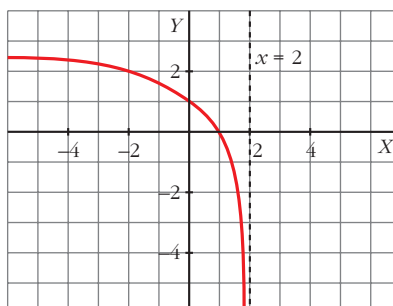


19 ¿Cuál es el dominio de esta función?

$$y = \log_2 (2 - x)$$

Represéntala.

Dominio: $(-\infty, 2)$

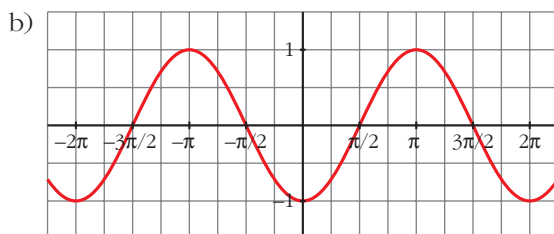
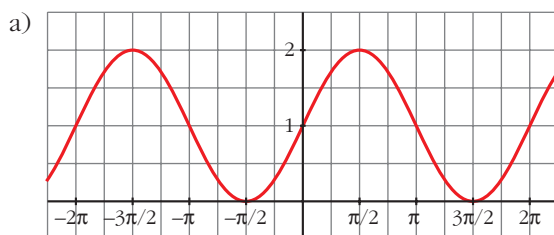


Funciones trigonométricas

20 Representa las funciones:

a) $y = 1 + \operatorname{sen} x$

b) $y = -\cos x$



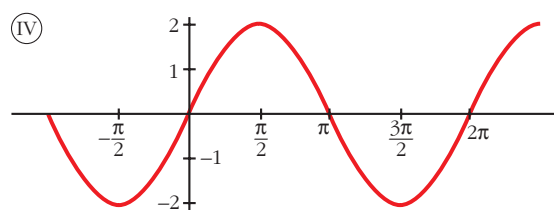
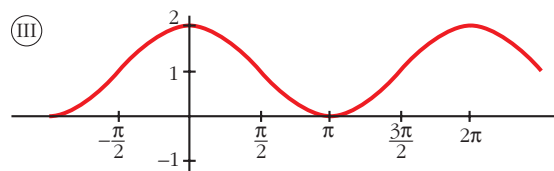
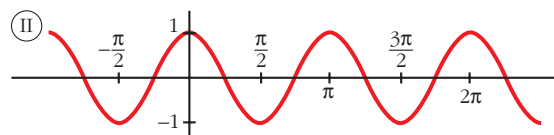
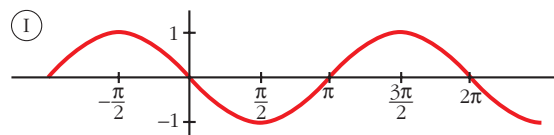
21 Asocia a cada una de las siguientes funciones, la gráfica que le corresponde:

a) $y = \cos 2x$

b) $y = -\operatorname{sen} x$

c) $y = 2 \operatorname{sen} x$

d) $y = 1 + \cos x$



a) → Ⓜ

b) → Ⓜ

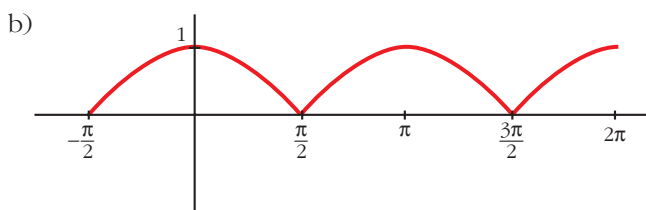
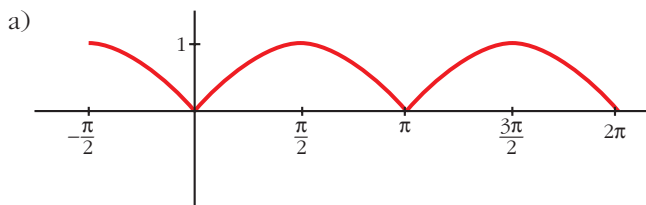
c) → ⓂⓂ

d) → ⓂⓂ

22 Representa las siguientes funciones:

a) $y = |\sin x|$

b) $y = |\cos x|$


23 Busca, en cada caso, los valores de x comprendidos entre 0 y 2π que verifiquen:

a) $\sin x = 0$

b) $\sin x = -1$

c) $\cos x = 1$

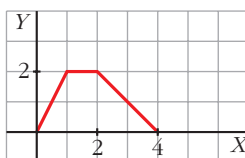
d) $\cos x = 0$

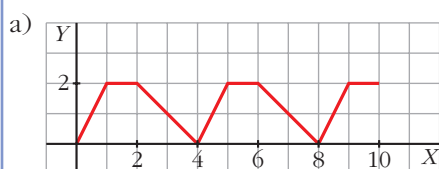
a) $\sin x = 0 \rightarrow x = 0; x = \pi; x = 2\pi$

b) $\sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

c) $\cos x = 1 \rightarrow x = 0; x = 2\pi$

d) $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$

24 La siguiente gráfica representa la variación de un movimiento que se repite periódicamente:

 a) Representala en el intervalo $[0, 10]$.

 b) Calcula $f(7)$, $f(10)$ y $f(20)$.


b) $f(7) = 1; f(10) = 2; f(20) = 0$

PARA RESOLVER

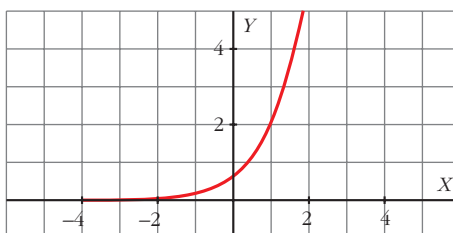
- 25** La gráfica de una función exponencial del tipo $y = k a^x$ pasa por los puntos $(0; 0,5)$ y $(1; 1,7)$.

Calcula k y a , y representa la función.

• Mira el problema resuelto 4.

$$\begin{cases} 0,5 = k \cdot a^0 \\ 1,7 = k \cdot a^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,5 = k \\ 1,7 = k \cdot a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 0,5 \\ a = 3,4 \end{cases}$$

La función es $y = 0,5 \cdot (3,4)^x$



- 26** Se llama inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 € al cabo de un año cuesta 104 €, la inflación ha sido del 4%. Si la inflación se mantiene constante en el 4% anual, ¿cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 12 000 €?

$$12\,000 \cdot (1,04)^5 = 14\,599,83 \text{ €}$$

- 27** Un capital de 10 000 € se deposita en un banco al 8,4% de interés anual con pago mensual de intereses. Escribe la función que nos dice en cuánto se transforma ese capital en m meses.

Calcula cuánto tarda en duplicarse el capital.

$$C = 10\,000 \left(1 + \frac{8,4}{1\,200}\right)^m = 10\,000 \cdot (1,007)^m$$

$$20\,000 = 10\,000 \cdot (1,007)^m \rightarrow 2 = 1,007^m \rightarrow m = \frac{\log 2}{\log 1,007} = 99,36$$

Tarda 100 meses en duplicarse.

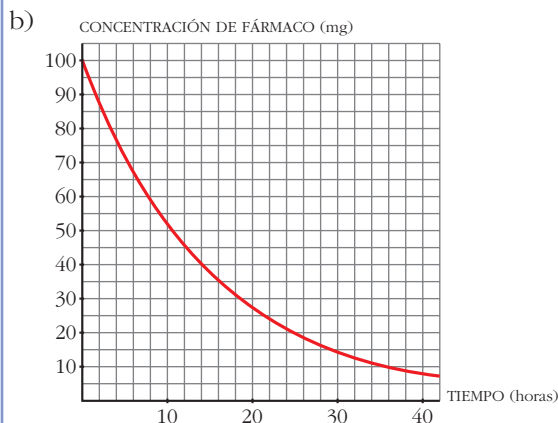
- 28** La concentración de un fármaco en sangre viene dada por $y = 100(0,94)^t$ (y en mg, t en h).

a) Di cuál es la dosis inicial y la cantidad de ese fármaco que tiene el paciente al cabo de 3 h.

b) Representa la función.

c) Si queremos que la concentración no baje de 60 mg, ¿al cabo de cuánto tiempo tendremos que inyectarle de nuevo?

- a) $t = 0 \rightarrow y = 100$ mg
 $t = 3 \rightarrow y = 83$ mg en 3 horas



- c) $100 \cdot (0,94)^t = 60 \rightarrow t \approx 8$ h 15 min
 Al cabo de, aproximadamente, 8 h 15 min.

29 Considera estas funciones:

$$f(x) = x - 5 \quad g(x) = \sqrt{x} \quad h(x) = \frac{1}{x + 2}$$

Explica cómo, a partir de f , g y h , se pueden obtener, por composición, p , q y r :

$$p(x) = \sqrt{x - 5}; \quad q(x) = \sqrt{x} - 5; \quad r(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$p = g \circ f \quad q = f \circ g \quad r = h \circ g$$

30 Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$, ¿cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

¿Y $(g \circ f)(x)$?

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

31 Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 2^{x/10}$ (y : miles de bacterias, x : horas). ¿Cuántas había en el momento inicial? ¿Y al cabo de 10 horas? ¿Cuánto tardarán en duplicarse?

$$x = 0 \rightarrow y = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 \rightarrow 2 \text{ 000 bacterias en el momento inicial.}$$

$$x = 10 \rightarrow y = 1 + 2 = 3 \rightarrow 3 \text{ 000 bacterias al cabo de 10 horas.}$$

$$1 + 2^{x/10} = 4 \rightarrow x = \frac{10 \log 3}{\log 2} \approx 15,8 \text{ h} \approx 16 \text{ h}$$

Tardarán en duplicarse unas 16 horas.

32 Halla la función inversa de estas funciones:

a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$

b) $y = 1 + 3^x$

a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}; \frac{x}{3} = 2^{y-1}; \log_2 \frac{x}{3} = y - 1$

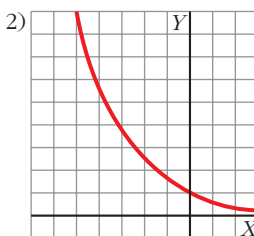
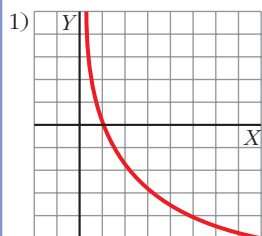
$$y = 1 + \log_2 \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_2 \frac{x}{3}$$

b) $x = 1 + 3^y; x - 1 = 3^y; \log_3(x - 1) = y \rightarrow f^{-1}(x) = \log_3(x - 1)$

Página 145

CUESTIONES TEÓRICAS

33 Estas gráficas corresponden a funciones del tipo $y = a^x$, $y = \log_a x$. Identifícalas e indica, en cada caso, si es $a > 1$ ó $0 < a < 1$.

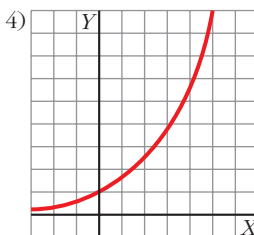
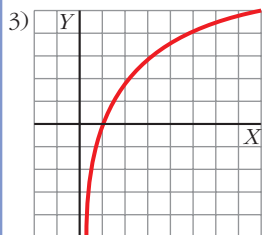


1) $y = \log_a x, 0 < a < 1$

2) $y = a^x, 0 < a < 1$

3) $y = \log_a x, a > 1$

4) $y = a^x, a > 1$



34 En las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$, ¿puede ser negativa la y ? ¿Podemos dar a x valores negativos?

Para $y = a^x$: La y no puede ser negativa y podemos dar a x valores negativos.

Para $y = \log_a x$: La y puede ser negativa y no podemos dar a x valores negativos.

35 Las gráficas de las funciones $y = \log_a x$ tienen un punto en común. ¿Cuál es ese punto? ¿Cuál es el punto común de las funciones $y = a^x$?

(1, 0) es el punto común de las funciones $y = \log_a x$.

(0, 1) es el punto común de las funciones $y = a^x$.

36 Di para qué valores de a es creciente y para cuáles es decreciente cada una de las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$.

Para $a > 1$ la función $y = \log_a x$ es creciente.

Para $0 < a < 1$ la función $y = \log_a x$ es decreciente.

Para $a > 1$ la función $y = a^x$ es creciente.

Para $0 < a < 1$ la función $y = a^x$ es decreciente.

37 ¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$, siendo $a > 1$?

$x < 0$

38 Considera las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

a) ¿Cuál es su periodo?

b) ¿Entre qué valores están acotadas?

c) ¿Para qué valores de x es $\operatorname{sen} x < 0$? ¿Y $\cos x < 0$?

a) 2π

b) Entre -1 y 1 .

c) Entre 0 y 2π : $\operatorname{sen} x < 0$ para $x \in (\pi, 2\pi)$

$$\cos x < 0 \text{ para } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Página 145

AUTOEVALUACIÓN

1. Dadas las funciones:

$$f(x) = 2x + 1; \quad g(x) = x^2 - 5, \text{ halla:}$$

a) $g[f(-2)]$

b) $f[g(0)]$

c) $f \circ f(x)$

d) $f \circ g(x)$

a) $g[f(-2)] = g[2 \cdot (-2) + 1] = g(-3) = (-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$

b) $f[g(0)] = f[0^2 - 5] = f(-5) = 2(-5) + 1 = -9$

c) $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 2 + 1 = 4x + 3$

d) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 5) = 2(x^2 - 5) + 1 = 2x^2 - 10 + 1 = 2x^2 - 9$

2. ¿Cuál es la función inversa de $f(x) = \sqrt{3x-2}$?

Comprueba que $f \circ f^{-1}(4) = 4$.

Para hallar la inversa de $y = \sqrt{3x-2}$, cambiamos la x por la y , y despejamos la y :

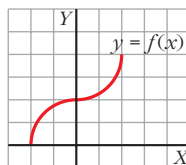
$$x = \sqrt{3y-2} \rightarrow x^2 = 3y-2 \rightarrow 3y = x^2 + 2 \rightarrow y = \frac{x^2 + 2}{3}$$

$$\text{Así, } f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

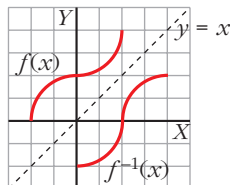
Por otra parte:

$$f \circ f^{-1}(4) = f\left(\frac{4^2 + 2}{3}\right) = f\left(\frac{18}{3}\right) = \sqrt{3 \cdot \frac{18}{3} - 2} = \sqrt{16} = 4$$

3. Representa la gráfica de la función inversa de $y = f(x)$.



La función $f^{-1}(x)$ es simétrica a $f(x)$ respecto a la recta $y = x$. Así:

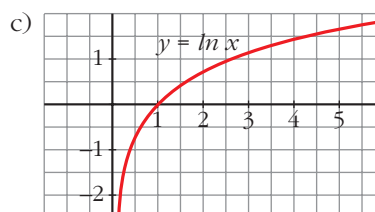
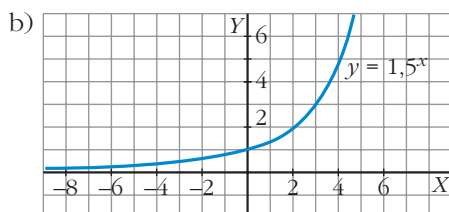
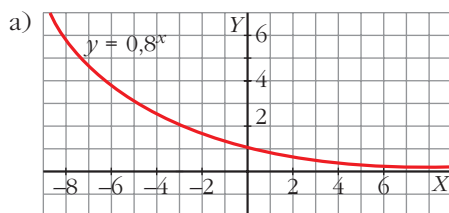


4. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 0,8^x$

b) $y = 1,5^x$

c) $y = \ln x$



- 5. La gráfica de la función $y = ka^x$ pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ y $(5; 6,4)$. Halla k y a y di si se trata de una función creciente o decreciente.**

- Pasa por $\left(0, \frac{1}{5}\right)$:

$$\frac{1}{5} = k \cdot a^0 = k \rightarrow k = \frac{1}{5}$$

- Pasa por $(5; 6,4)$:

$$6,4 = \frac{1}{5} a^5 \rightarrow a^5 = 32 \rightarrow a = 2$$

Por tanto, la función es $y = \frac{1}{5} 2^x$. Es una función creciente, puesto que la base es mayor que 1.

- 6. Justifica cuál de las siguientes funciones es la función inversa de $y = 3^x - 2$.**

a) $y = 2 + \log_3 x$

b) $y = \sqrt[3]{x+2}$

c) $y = \log_3 (x+2)$

La función es $f(x) = 3^x - 2$. Veamos cada uno de los casos:

a) $f(2 + \log_3 x) = 3^{(2 + \log_3 x)} - 2 = 3^2 \cdot 3^{\log_3 x} - 2 = 9x - 2 \neq x$

$y = 2 + \log_3 x$ no es la inversa de $f(x)$.

b) $f(\sqrt[3]{x+2}) = 3^{\sqrt[3]{x+2}} - 2 \neq x$

$y = \sqrt[3]{x+2}$ no es la inversa de $f(x)$.

c) $f[\log_3 (x+2)] = 3^{\log_3 (x+2)} - 2 = (x+2) - 2 = x$

$y = \log_3 (x+2)$ sí es la inversa de $f(x)$.

- 7. El precio de una furgoneta baja un 10% por año de utilización. Si costó 18 000 €, ¿cuánto tardará en reducirse a la mitad?**

La función que describe esta situación es:

$$C = 18000 \cdot 0,9^t$$

Como queremos que el capital final sea 9000 €:

$$9000 = 18000 \cdot 0,9^t \rightarrow 0,9^t = 0,5 \rightarrow t = \log_{0,9} 0,5 = \frac{\log 0,5}{\log 0,9} = 6,58$$

Por tanto, el capital se habrá reducido a la mitad entre el 6.º y el 7.º año.

8. Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0,5 \cdot 2^{0,4x}$ (x = tiempo en días; y = número de insectos en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en duplicarse.

a) La población inicial se calcula haciendo $x = 0$.

$$y(0) = 1 + 0,5 \cdot 2^{0,4 \cdot 0} = 1 + 0,5 = 1,5$$

La población inicial es de 1 500 insectos.

b) Se duplicará al llegar a 3 000 insectos, es decir:

$$3 = 1 + 0,5 \cdot 2^{0,4x} \rightarrow 2^{0,4x} = \frac{2}{0,5} \rightarrow 2^{0,4x} = 4 \rightarrow 2^{0,4x} = 2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,4x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{0,4} \rightarrow x = 5$$

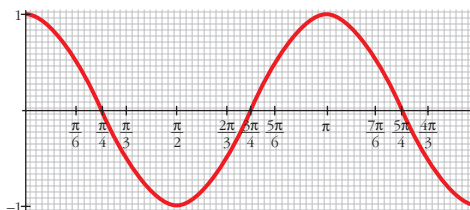
Por tanto, la población de insectos se duplicará en 5 días.

9. Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:

a) $y = \cos x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = 2\cos x$



Completa estos puntos para que pertenezcan a la gráfica:

$$(5\pi/6, \dots), (4\pi/3, \dots), (-\pi/4, \dots).$$

La gráfica corresponde a la función b), $y = \cos 2x$.

$$\text{Su periodo es } \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi.$$

$$\text{Los puntos buscados son: } \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$$